

# ガイド波の1世紀と半世紀\*

尾上 守夫 (東京大学名誉教授)\*\*

43.10.Mg; 43.20.Bi; 43.35.Cg

音響の古典といえば Lord Rayleigh の “Theory of Sound” (1877, 1896) であろう。ただ彼の業績はそれよりはるかに広い分野に及んでいる。1885年 Proc. London Math. Soc. に “On waves propagated along the plane surface of an elastic body” という論文を発表した。当時すでに無限媒質内では縦波と横波との体積弾性波が伝搬することは知られていた。この論文は境界面があると、それに沿って伝搬する新しい波 (Rayleigh 表面波) が存在することを、解析的に示したものである。彼はその結語に “It is not improbable that the surface waves here investigated play an important part in earthquakes…” と 2 重否定を使った控えめな予想をしるしている。しかしその後 1 世紀の地震波動, 超音波非破壊検査, 弾性表面波デバイスなどの発展はその予想をはるかに超えてきた。ここでは紙幅の制限もあるので, そのごく一部について分散曲線を中心に回顧したい。

彼は更に平行な境界面がある場合, すなわち板を伝搬する波 (板波) を解析し, Rayleigh-Lamb の分散方程式と呼ばれる次式を導いた。

$$\frac{\tan(qh)}{\tan(ph)} + \left[ \frac{4k^2 pq}{(q^2 - k^2)^2} \right]^{\pm 1} = 0$$

$$\omega^2 = c_L^2(p^2 + k^2) = c_S^2(q^2 + k^2)$$

$\omega$ : 角周波数,  $k$ : 波数,  $2h$ : 板厚

$c_L$ : 縦波速度,  $c_S$ : 横波速度

複号は対称モード (伸縮波) と斜対称モード (屈曲波) に対応している。この一見単純な方程式の解は予想以上に複雑である。独立な変数は  $(\omega h, kh)$  あるいはそれと等価な  $(ph, qh)$  の 2 個であるが,  $(\omega h, kh)$  平面に描いた解を分散曲線と呼び, その傾斜が位相速度, 微係数が群速度を与える。そ

の後境界面が多層の場合や曲面の場合に拡張され, それらを総称してガイド波と呼んでいる。はじめの半世紀は専ら  $k$  が実数 (実数分枝) の伝搬する波に関心が向けられていた。

1951 年 Holden は  $(ph, qh)$  平面上で対称モードについて, 分散曲線の存在域や分岐状況を調べて全貌が容易に把握できることを示した [1]。筆者はそれを斜対称モードに拡張し, 更に両モードに  $k$  が純虚数になる解 (虚数分枝) が存在することを示した [2]。

当時米国コロンビア大学の Mindlin 教授は従来より近似を高めた plate equation を導き, 水晶などの異方性を含む各種の弾性振動の解析を勢力的に行なっておられた。筆者は 1956-58 年フルブライト交換研究員として, そこに加わることができた。Mindlin の plate equation による分散方程式は 3 次の代数方程式になる。高周波では 3 個の実根 (実数分枝) が存在するが, 低周波では 1 個しかない。虚根もない。とすれば残るは共役複素根である [3]。原の R-L 分散方程式に立ち返って調べてみると, 全周波数にわたって無数の複素分枝を見出すことができた [4, 5]。

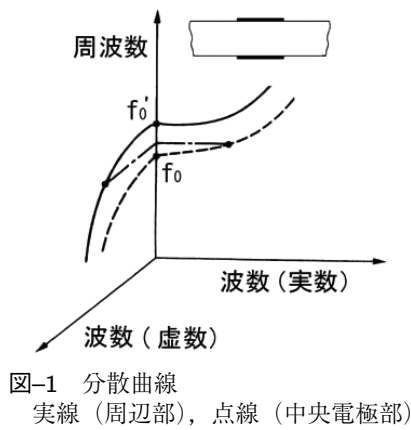
複素分枝は波として見ると, 振幅が指数関数的に減少する正弦波である。縁が特に大きく振動する edge mode と名づけた伝搬あるいは共振現象はこれによってはじめて理解できるようになった [6]。更に重要なことは矩形板や丸棒の振動の精度のよい解析が可能になることである。

分散方程式の各分枝は主面の境界条件は満たしている。複数の分枝を使って, 端面の境界条件を近似的に満たすようにして, 有限体の近似解が得られる。分枝の数が増えれば精度が上がる。しかし前述のように実数分枝のみでは低周波では 1 個しか使えない。複素分枝によってそれがいくらかでも得られるようになったわけである [7]。

伝搬する波 (実数分枝) から伝搬しない波 (虚

\* One century and a half century in elastic guided waves.

\*\* Morio Onoe (Professor Emeritus, University of Tokyo) e-mail: m.onoe@ieee.org



数分枝, 複素分枝) への接続点を遮断周波数と呼ぶ。図-1 は多くの圧電材料で見られる典型的な分散曲線である。この場合遮断周波数は波数がゼロの軸上にあり, 厚み振動の共振周波数そのものである。従って板の一部 (これを電極部と呼び, その周辺を無電極部と呼ぶ) の厚み寸法を増し, あるいは電極の負荷効果で遮断周波数を  $f_0'$  から  $f_0$  に下げることができ, それに伴って分散曲線も実線から点線のように低下する。

両遮断周波数の間の周波数で, 波は電極部で自由に往来するが, 無電極部に入ると指数的に減衰する。ただこの減衰は損失によるものではなく, 反射によるものである。従って電極部の少し外側に仮想的な反射面ができたのと同様で, ある周波数で定在波が成立し共振する。その振動エネルギーはほとんど電極部にあるので, エネルギー閉じ込めモードと呼んでいる。このモードを利用した振動子では板の輪郭寸法に由来する副振動に悩まされることがない。またまた一枚の板の上に複数の独立な振動子を設けることができる。

Curran はこのようなモードを圧電セラミックの厚み縦振動で見出し, 一枚の板上の複数振動子で梯子型フィルタが組めることから Uniwafer Filter と名付けた。なぜそのようなことが可能なかは当初は不明であったが, 上記の理論的解明は半導体で有名な Schockley によって与えられた。ただ彼の解析は対称モードに限られ, しかも高次モードを斜対称モードと誤解していた [8]。筆者らは正

しい斜対称モードを導き, 対称モードと組み合わせて, 1 段当たりの保証減衰量が高い格子型フィルタの特性が得られることを示した。更に板上の複数振動子の間隔をつめることにより, 相互に結合させて, 結合共振回路型のフィルタが実現できることも示した [9]。これらのフィルタはその後 MCF と呼ばれ大きく発展した。

ガイド波はまたパイプのような長尺の設備の検査に適している。走査なしで長い距離が測れるからである。その伝搬路の途中にエネルギー閉じ込めモードの共振部を設けると, 波に対する反射あるいは透過係数が, その共振周波数で急変する。従って遠方からでも反射波あるいは透過波を観測することで共振周波数と  $Q$  とが求まることになる。すなわちパイプの肉厚とその内部腐食の程度が遠隔測定できるわけである [10]。

文 献

- [1] A.N. Holden, "Longitudinal modes of elastic waves in isotropic cylinders and slab," *Bell Syst. Tech. J.*, 30, Pt. 1, 956 (1951).
- [2] 尾上守夫, "板及び丸棒の速度分散方程式の根の検討," 超音波研究専門委員会資料, July 20 (1955).
- [3] R.D. Mindlin and M.A. Medick, "Extensional vibrations of elastic plates," *J. Appl. Mech.*, 26, pp. 561-569 (1959).
- [4] R.D. Mindlin and M. Onoe, "Mathematical theory of vibrations of elastic plates," *Proc. Freq. Control Symp.*, pp. 17-40 (1957).
- [5] R.D. Mindlin, "Waves and vibrations in isotropic, elastic plates," in *Structure Mechanics* (Pergamon Press, Oxford, 1960), pp. 199-232.
- [6] M. Onoe, "Frequency of edge mode of isotropic thin rectangular plate, circular disk and rod," *J. Acoust. Soc. Am.*, 33, 1627 (1961).
- [7] M. Onoe, "Contour vibrations of thin rectangular plates," *J. Acoust. Soc. Am.*, 30, 1159-1162 (1958).
- [8] W. Schockley, D.R. Curran and D.J. Koneval, "Energy trapping and related studies of multiple electrode filter crystals," *Proc. Freq. Control Symp.*, pp. 88-126 (1963).
- [9] M. Onoe, H. Jumonji and K. Kobori, "High frequency crystal filters employing multiple mode resonators vibrating in trapped energy modes," *Proc. Freq. Control Symp.*, pp. 266-287 (1966).
- [10] M. Onoe, "Remote excitation of trapped energy modes in plates and pipes and its applications to sensors and non-destructive testing," *Proc. Freq. Control Symp.*, pp. 488-493 (2007).